f est continue sur $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ et $\frac{1}{6}\le f(x)\le\frac{3}{10}$

d'après le théorème de la moyenne :

$$\frac{1}{6}\le \bar{f}(x)\le\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{1}{6}\le\frac{6}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx\le\frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{36}\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{3+tg^2x}\le\frac{\pi}{20}$$

EX 31 :

$$V=\pi.\int_0^2 x^4dx=\pi.\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{32\pi}{5}\ \mathbf{u.v}$$

EX 32 :

$$V=\pi.\int_1^3\frac{1}{x^2}dx=\pi.\left[\frac{-1}{x}\right]_1^3=\frac{2\pi}{3}\ \mathbf{u.v}$$

EX 33 :

$$V=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{4}}tg^2xdx=\pi.[tgx-x]_0^{\frac{\pi}{4}}=(1-\frac{\pi}{4}).\pi\ \mathbf{u.v}$$

EX 34 :

$$V=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x\sin x)dx$$

$$=\pi.\left[x+\sin^2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi.(1+\frac{\pi}{2})\ u.v$$

EX 35 :

$$V=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2.dx-\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2xdx$$

$$=\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2.dx-\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$$

$$=\pi.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2-\pi.\left[\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{3}(\frac{\pi}{2})^3-\frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^4}{24}-\frac{\pi^2}{4}\ \ u.v$$

EX 36 :

I. $F(x)=\int_0^{tgx}\frac{dt}{1+t^2}$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

1) la fonction : $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ est continue sur IR

la fonction : $x\mapsto tgx$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$tg\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right)=[0,1]\subset IR$ et $0\in IR$

d'où f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et

$$F'(x)=(tgx)'.\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1+tg^2x}{1+tg^2x}=1$$

2) F est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ et F'(x)=1

d'où F(x)=x+k ; $k\in IR$

$F(0)=\int_0^0\frac{dt}{1+t^2}=0 \Rightarrow 0+k=0 \Rightarrow k=0$

d'où F(x)=x ; $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

3) $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{tg\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{1+t^2}=F(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$

II / $I_n=\int_0^1\frac{1}{(1+t^2)^n}$ $n\in\mathbb{N}$

1) * $I_0=\int_0^1 dt=[t]_0^1=1$

$$*I_1=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$$

2) $n\ge 1$

$$I_{n+1}=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

$$I_n=\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

intégration par parties :

on pose $\begin{cases}U'(t)=1\xrightarrow{P}U(t)=t\\ V(t)=\frac{1}{(1+t^2)^n}\xrightarrow{d}V'(t)=\frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}\end{cases}$

$$I_n=\left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^1+2n.\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn